5. Dokazati da je $H = \{(1, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ sa operacijom $*$ podgrupa grupe G (zad. 4).

$H \subseteq G$

1°) $(1, b), (1, c) \in H$

$(1, b) * (1, c) = (1 \cdot 1, 1 \cdot c + b) = (1, b + c) \in H$

2°) Asoc. važi

3°) $(1, 0)$ je neutralni element u $(G, *)$ i kako $(1, 0) \in H \Rightarrow (1, 0)$ je neutralni element u $(H, *)$

4°) $(1, b) \xRightarrow{\text{zad. 4.}} \left(\frac{1}{1}, -\frac{b}{1}\right) = (1, -b) \in H$

$(1, b) * (1, -b) = (1, 0)$

$(H, *)$ jeste podgrupa grupe $(G, *)$

$$\left.\begin{aligned} (1, a) * (1, b) &= (1, b + a) \\ (1, b) * (1, a) &= (1, a + b) \end{aligned}\right\} H \text{ je Abelova grupa}$$

6. G - grupa, $H \subseteq G$. Tada je $H \leq G \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall a, b \in H \quad ab^{-1} \in H$

D| Ako $H \leq G$.

$a, b \in H$

$a \in H$

$b \in H \xRightarrow[\text{grupa}]{H \text{ je}} b^{-1} \in H$

$$\Rightarrow \underset{\in H}{a} * \underset{\in H}{b^{-1}} \underset{\substack{H \text{ je} \\ \text{grupa}}}{\in} H$$

$(\Leftarrow)$ $\left.\begin{array}{l} a \in H \\ a \in H \end{array}\right\}$ $a * a^{-1} \in H$

$$\boxed{e \in H}$$

3°) Važi

$\left.\begin{array}{l} e \in H \\ b \in H \end{array}\right\}$ $e * b^{-1} \in H$

$$\boxed{b^{-1} \in H}$$

4°) Važi

$$a, b \in H \overset{?}{\Longrightarrow} a * b \in H$$

$a \in H$

$b \in H \Rightarrow b^{-1} \in H$

$$a * \underbrace{(b^{-1})^{-1}}_{b} \in H$$

$$\boxed{a * b \in H}$$

1°) Važi

$$H \leq G$$

Prethodni zad.

$(1, b), (1, c) \rightarrow (1, -c)$ je inv.

$(1, b) * (1, -c) =$

$= (1, -c + b) \in H$

Primjeri podgrupa:

1) $n\mathbb{Z} = \{ nz \mid z \in \mathbb{Z} \} = \{0, \pm n, \pm 2n, \pm 3n, \dots\}$

$n\mathbb{Z} \leq (\mathbb{Z}, +)$

$nz_1, nz_2 \in n\mathbb{Z}$

$nz_1 + (-nz_2) = n\underbrace{(z_1 - z_2)}_{\in \mathbb{Z}} \in n\mathbb{Z}$

---

2) $D(n, \mathbb{R}) \leq GL(n, \mathbb{R})$

D → dijagonalna regularna matrica $n \times n$ nad $\mathbb{R}$

GL → reg. matrice $n \times n$ nad $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n b_n \end{pmatrix}$$

Scanned by TapScanner

Vježbe

1. Neka je G grupa i $C(G) = \{g \in G \mid gx = xg, \forall x \in G\}$

centralizator grupe G

Dokazati da je $C(G)$ podgrupa grupe G.

$a, b \in C(G)$

$\left.\begin{array}{l} ax = xa \\ bx = xb \end{array}\right\} \forall x \in G$

$bx = xb \,/\, b^{-1}$

$b^{-1} \backslash bxb^{-1} = x$

$xb^{-1} = b^{-1}x$

$\Downarrow$

$b^{-1} \in C(G)$

$ab^{-1} \overset{?}{\in} C(G)$

$(\forall x \in G) \quad ab^{-1}x \overset{?}{=} xab^{-1}$

$ab^{-1}x = axb^{-1} = xab^{-1}$

$\Downarrow$

$ab^{-1} \in C(G)$

(Zad) Sve podgrupe grupe $(\mathbb{Z},+)$ su oblika $n\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$.

(R) $H \leq (\mathbb{Z},+)$, $H\neq\emptyset$

1) Ako je $H=\{0\}$ tada je $H=0\cdot\mathbb{Z}$

2) Ako je $H\neq\{0\}$ tada $\exists a>0$, $a\in H$
(ako je $a<0, a\in H$ tada je $-a>0, -a\in H$)
$S=\{a\in\mathbb{Z} \mid a\in H, a>0\}$

Neka je $m=\min S$ (postoji minimum skupa S jer $S\neq\emptyset$ i svaki neprazni podskup prirodnih brojeva ima minimalni element).

Pokažimo da je
$m\mathbb{Z}=H$.

Kako je $m\in H$ tada $m\mathbb{Z}=\{mk \mid k\in\mathbb{Z}\}\subseteq H$
jer je H grupa $\begin{cases} (mk=\underbrace{m+\dots+m}_{k>0}\in H) \\ (mk=\underbrace{(-m)+\dots+(-m)}_{-k>0}\in H) \end{cases}$

Dakle, $\boxed{m\mathbb{Z}\subseteq H}$

Neka je $x\in H \Rightarrow \exists q\in\mathbb{Z}$, $r\in\{0,\dots,m-1\}$
t.d. $x=mq+r$ (po algoritmu dijeljenja)

tada $r=x-mq\in H$ (jer $x\in H$, $mq\in H$)

Kako je $r\in H$ i $r\in\{0,\dots,m-1\}$ i $m=\min S$
$\Rightarrow r=0$

Dakle, $x=mq$ tj. $x\in m\mathbb{Z}$
$\Rightarrow \boxed{H\subseteq m\mathbb{Z}}$

Scanned by TapScanner

(Zad)
$G = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R}, ac \neq 0 \}$

$H = \{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \}$

a) Dokazati da je G sa operacijom množenja matrica grupa.

b) Dokazati da je H podgrupa grupe G.

(Rj) a) (sami)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

b). $\cancel{A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -y+x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H.$$

· Korišćen je zadatak:

× G grupa, $H \subseteq G, H \neq \emptyset$

$H \leq G \iff \forall a,b \in A \quad ab^{-1} \in H$

(8.) Neka su H i K podgrupe grupe G, $(G,\cdot)$. Dokazati da je $H \cup K$ podgrupa grupe G akko $H \subseteq K$ ili $K \subseteq H$.

$(\Leftarrow)$ Ako je $H \subseteq K$ ili $K \subseteq H$ tada je $H \cup K = K$ ili $H \cup K = H$, a $H, K \leq G$.

$(\Rightarrow)$ Pretpostavimo suprotno, da $H \nsubseteq K$ i $K \nsubseteq H$.

$\exists h \in H \setminus K$ i $\exists k \in K \setminus H$

$h, k \in H \cup K \quad (H \cup K \leq G)$

$h \cdot k \in H \cup K$

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{1°|} & h \cdot k \in H \\ \underline{2°|} & h \cdot k \in K \end{array}\right\}$$

$\underline{1°|}$ $h \cdot k = h_1 \in H$

$$k = \underbrace{h^{-1}}_{\in H}\underbrace{h_1}_{\in H} \in H \quad ↯$$

$\underline{2°|}$ $h \cdot k = k_1 \in K$

$$h = \underbrace{k_1}_{\in K}\underbrace{k^{-1}}_{\in K} \in K \quad ↯$$